Lucrarea 1

Determinarea matricii de trecere dintr-un sistem de referință în alt sistem de referință. Transformarea de coordonate dintr-un sistem de referință în altul

Noțiuni introductive

Fie două sisteme de referință, notate cu $O_1x_1y_1z_1$ şi $O_2x_2y_2z_2$. Acestea sunt sisteme de axe tri-ortogonale (formează 3 plane, perpendiculare în spațiu între ele), drepte, adică: $\overline{Oz} = \overline{Ox} \times \overline{Oy}$ sau cu versorii de axe: $\overline{k} = \overline{i} \times \overline{j}$.

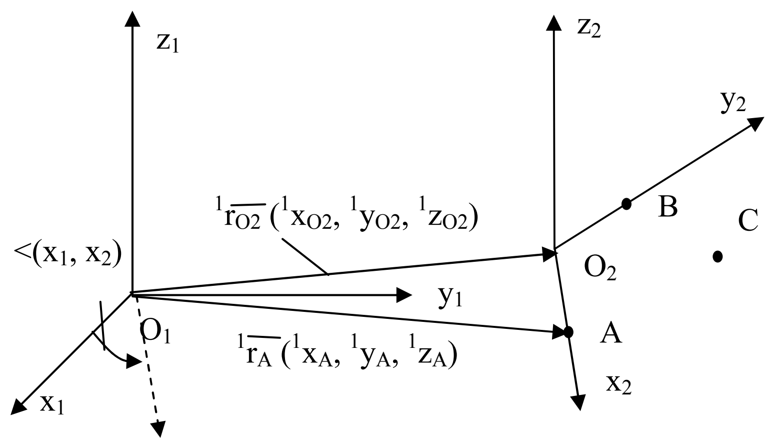

Figura 1.1. Două sisteme de referință 1 şi 2 şi vectorii de poziție a punctelor O_2 şi A

Fie:

- punctele O_2, adică originea sistemului de referință 2, A un punct pe axa O_2x_2, în sensul pozitiv al axei, B un punct pe axa O_2y_2, în sensul pozitiv ale axei;
- vectorii de poziție ai acestor puncte în raport cu sistemul de axe 1, adică $^1r_{O2}$, ^1r_A, ^1r_B; reprezentați în figura 1.1.

Să se determine vectorul de poziție ale punctului C în raport cu sistemul de referință 1, adică $^1\overline{r}_C$, dacă se cunoaşte vectorul de poziție al punctului C în raport cu sistemul de referință 2, $^2\overline{r}_C$. Acest vector se calculează după formula:

$$\underline{^1r_C} = \underline{^1T_2} * \underline{^2r_C} \qquad (1.1)$$

unde $\underline{^1r_C}, \underline{^2r_C}$ sunt matricile transpuse ale vectorului de poziție al punctului în raport cu sistemul de referință (1) şi respectiv (2).

Vector de poziție: $\overline{^1r_C} = x_{C1} \cdot \overline{i}_1 + y_{C1} \cdot \overline{j_1} + z_{C1} \cdot \overline{k_1}$, $\overline{^2r_C} = x_{C2} \cdot \overline{i}_2 + y_{C2} \cdot \overline{j_2} + z_{C2} \cdot \overline{k_2}$

$$ {}^{1}\underline{r}_C = \begin{bmatrix} {}^{1}x_C \\ {}^{1}y_C \\ {}^{1}z_C \\ 1 \end{bmatrix} \quad {}^{2}\underline{r}_C = \begin{bmatrix} {}^{2}x_C \\ {}^{2}y_C \\ {}^{2}z_C \\ 1 \end{bmatrix} $$

, iar ${}^{1}\underline{T}_2$ este matricea de trecere a sistemului de referință 2 față de sistemul de referință 1.

Matricea de trecere dintr-un sistem de referință (2) în altul (1) este de forma:

$$ {}^{1}\underline{T}_2 = \begin{bmatrix} \cos(x_1, x_2) & \cos(x_1, y_2) & \cos(x_1, z_2) & {}^{1}x_{O2} \\ \cos(y_1, x_2) & \cos(y_1, y_2) & \cos(y_1, z_2) & {}^{1}y_{O2} \\ \cos(z_1, x_2) & \cos(z_1, y_2) & \cos(z_1, z_2) & {}^{1}z_{O2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (1.2) $$

unde $\cos(x_1, y_2)$ este cosinusul director al unghiului dintre axa x_1 a sistemului de referință 1 şi axa y_2 a sistemului de referință 2, iar ${}^{1}z_{O2}$ este coordonata z a originii sistemului de referință 2 în raport cu sistemul de referință 1.

Exemplu numeric în plan

1. Se va calcula matricea de trecere din sistemul de referință 2 în sistemul 1 şi coordonatele punctului C față de sistemul de referință 1 din figura 1.2. Datele inițiale sunt:

- coordonatele carteziene ale originii sistemului de referință 2 față de 1: ${}^{1}x_{O2}=-10$, ${}^{1}y_{O2}=14$;
- coordonatele carteziene ale punctului A față de sistemul 1: ${}^{1}x_A=-20$, ${}^{1}y_A=24$;
- coordonatele carteziene ale punctului B față de sistemul 1: ${}^{1}x_B=-24$, ${}^{1}y_B=0$;
- coordonatele carteziene ale punctului C față de sistemul 2: ${}^{2}x_C=10\sqrt{2}=14{,}142$; ${}^{2}y_C=8\sqrt{2}=11{,}313$.

Se cere: să se calculeze elementele matricii de trecere din sistemul de referință 2 în sistemul 1 şi coordonatele carteziene ale punctului C față de sistemul de referință 1 (figura 1.2).

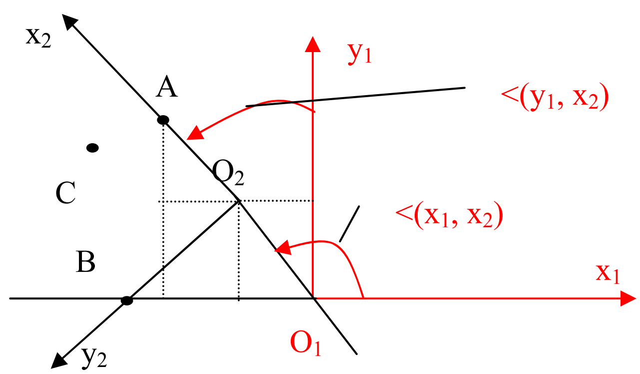

Figura 1.2. Exemplu de calcul pentru trecerea coordonatelor din sistemul de referință 2 în sistemul de referință 1

Dacă se reprezintă situarea relativă a sistemelor de referință ca în figura 1.2, se deduce că elementele matricii de trecere devin:

$$
{}^{1}\underline{T}_{2} = \begin{bmatrix} \cos(x_1, x_2) & \cos((x_1, x_2) + 90°) & -10 \\ \cos((x_1, x_2) - 90°) & \cos(x_1, x_2) & 14 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

unde $\cos(x_1, x_2)$ se calculează cu relația:

$$
\angle(x_1, x_2) = \pi - a\tan\left(\frac{{}^{1}y_A - {}^{1}y_{O2}}{-({}^{1}x_A - {}^{1}x_{O2})}\right) = \pi - a\tan\left(\frac{24-14}{-(-20+10)}\right) = 2{,}35619\,rad
$$

sau

$$
\angle(x_1, x_2) = \frac{\pi}{2} + a\tan\left(\frac{-({}^{1}y_B - {}^{1}y_{O2})}{-({}^{1}x_B - {}^{1}x_{O2})}\right) = \frac{\pi}{2} + a\tan\left(\frac{-(0-14)}{-(-24+10)}\right) = 2{,}35619\,rad
$$

$$
{}^{1}\underline{T}_{2} = \begin{bmatrix} \cos(135°) & \cos(225°) & -10 \\ \cos(45°) & \cos(135°) & 14 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Conform formulei 1.1, se calculează coordonatele carteziene ale punctului C în raport cu sistemul de referință 1 astfel:

$$
{}^{1}\underline{r}_{C} = \begin{bmatrix} {}^{1}x_C \\ {}^{1}y_C \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x_1, x_2) & \cos((x_1, x_2) + 90°) & {}^{1}x_{O2} \\ \cos((x_1, x_2) - 90°) & \cos(x_1, x_2) & {}^{1}y_{O2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} {}^{2}x_C \\ {}^{2}y_C \\ 1 \end{bmatrix}
$$

, adică

$$
{}^{1}\underline{r}_{C} = \begin{bmatrix} -0{,}7071 & -0{,}7071 & -10 \\ 0.7071 & -0{,}7071 & 14 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 10\sqrt{2} \\ 8\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -28 \\ 16 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

deci ${}^{1}r_C$ (-28,16).

2. Se va calcula matricea de trecere din sistemul de referință 1 în sistemul 2 şi coordonatele punctului C față de sistemul de referință 2 din figura 1.3. Datele inițiale sunt:

- coordonatele carteziene ale originii sistemului de referință 2 față de 1: ${}^{1}x_{O2}=-2$, ${}^{1}y_{O2}=-2$;
- coordonatele carteziene ale punctului A față de sistemul 1: ${}^{1}x_A=-2$, ${}^{1}y_A=-5$;
- coordonatele carteziene ale punctului B față de sistemul 1: ${}^{1}x_B=3$, ${}^{1}y_B=-2$;
- coordonatele carteziene ale punctului C față de sistemul 2: ${}^{1}x_C=3$;${}^{1}y_C=-5$.

Se cere: să se calculeze elementele matricii de trecere din sistemul de referință 1 în sistemul 2 şi coordonatele carteziene ale punctului C față de sistemul de referință 2 (figura 1.3).

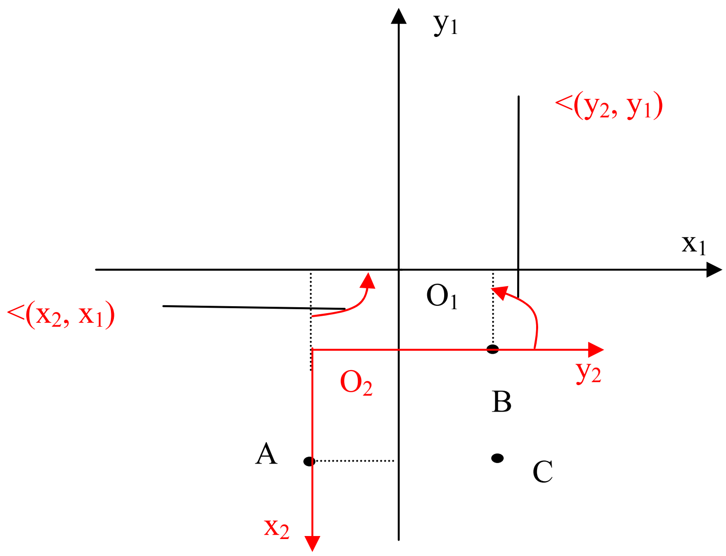

Figura 1.3. Exemplu de calcul pentru trecerea coordonatelor din sistemul de referință 1 în sistemul de referință 2

Dacă se reprezintă situarea relativă a sistemelor de referință ca în figura 1.3, se deduce că elementele matricii de trecere devin:

$$\underline{{}^2T_1} = \begin{bmatrix} \cos(x_2, x_1) & \cos(x_2, y_1) & {}^2x_{O_1} \\ \cos(y_2, x_1) & \cos(y_2, y_1) & {}^2y_{O_1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(90^\circ) & \cos(180^\circ) & -2 \\ \cos(0^\circ) & \cos(90^\circ) & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{{}^2T_1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Similar celor de mai sus, se calculează coordonatele carteziene ale punctului C în raport cu sistemul de referință 2 astfel:

$$\underline{{}^2r_C} = \begin{bmatrix} {}^2x_C \\ {}^2y_C \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x_2, x_1) & \cos(x_2, y_1) & {}^2x_{O_1} \\ \cos(y_2, x_1) & \cos(y_2, y_1) & {}^2y_{O_1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} {}^1x_C \\ {}^1y_C \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ adică } \underline{{}^2r_C} = \underline{{}^2T_1} \cdot \underline{{}^1r_C}$$

$$\underline{{}^2r_C} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$ deci ${}^2r_C$ (3,5).

Probleme propuse

1. Fie sistemele de de referință $x_1O_1y_1$ şi $x_2O_2y_2$ şi coordonatele O_2 față de $x_1O_1y_1$ sunt ${}^1O_2(6,0)$. Punctul A pe axa x_2O_2, în sensul pozitiv al axei, are coordonatele față de sistemul de referință $x_1O_1y_1$: ${}^1A(11, 5\sqrt{3})$. Punctul B pe axa O_2y_2, în sensul pozitiv al axei, are coordonatele față de sistemul de referință $x_1O_1y_1$: ${}^1B(0, (2\sqrt{3}))$.
Să se calculeze coordonatele punctului C față de sistemul de referință $x_1O_1y_1$, dacă coordonatele acestui punct față de sistemul de referință $x_2O_2y_2$ sunt: ${}^2C(10; 4\sqrt{3})$.
2. Fie sistemele de de referință $x_1O_1y_1$ şi $x_2O_2y_2$ şi coordonatele O_2 față de $x_1O_1y_1$ sunt ${}^1O_2(-5,2)$. Punctul A pe axa x_2O_2, în sensul negativ al axei, are coordonatele față de sistemul de referință $x_1O_1y_1$: ${}^1A(0, -2))$. Punctul B pe axa O_2y_2, în sensul pozitiv al axei, are coordonatele față de sistemul de referință $x_1O_1y_1$:
${}^1B(-5, -7)$.
Să se calculeze coordonatele punctului C față de sistemul de referință $x_2O_2y_2$, dacă coordonatele acestui punct față de sistemul de referință $x_1O_1y_1$ sunt: ${}^1C(0,5)$.
3. Fie sistemele de de referință $x_1O_1y_1$ şi $x_2O_2y_2$ şi coordonatele O_2 față de $x_1O_1y_1$ sunt ${}^1O_2(-10,-10)$. Punctul A pe axa x_2O_2, în sensul pozitiv al axei, are coordonatele față de sistemul de referință $x_1O_1y_1$: ${}^1A(0, -20)$. Punctul B pe axa O_2y_2, în sensul pozitiv al axei, are coordonatele față de sistemul de referință $x_1O_1y_1$:
${}^1B(0, 0)$.
Să se calculeze coordonatele punctului C față de sistemul de referință $x_1O_1y_1$, dacă coordonatele acestui punct față de sistemul de referință $x_2O_2y_2$ sunt: ${}^2C(0, -10)$.
4. Fie sistemele de de referință $x_1O_1y_1$ şi $x_2O_2y_2$ şi coordonatele O_2 față de $x_1O_1y_1$ sunt ${}^1O_2(10,-5)$. Punctul A pe axa x_2O_2, în sensul negativ al axei, are coordonatele față de sistemul de referință $x_1O_1y_1$: ${}^1A(10, 0)$. Punctul B pe axa O_2y_2, în sensul negativ al axei, are coordonatele față de sistemul de referință $x_1O_1y_1$:
${}^1B(0, -5)$.
Să se calculeze coordonatele punctului C față de sistemul de referință $x_1O_1y_1$, dacă coordonatele acestui punct față de sistemul de referință $x_2O_2y_2$ sunt: ${}^2C(2,5)$.
5. Fie sistemele de de referință $x_1O_1y_1$ şi $x_2O_2y_2$ şi coordonatele O_2 față de $x_1O_1y_1$ sunt ${}^1O_2(7, 5)$. Punctul A pe axa x_2O_2, în sensul pozitiv al axei, are coordonatele față de sistemul de referință $x_1O_1y_1$: ${}^1A(7, -2)$. Punctul B pe axa O_2y_2, în sensul negativ al axei, are coordonatele față de sistemul de referință $x_1O_1y_1$: ${}^1B(0, 5)$.
Să se calculeze coordonatele punctului C față de sistemul de referință $x_1O_1y_1$, dacă coordonatele acestui punct față de sistemul de referință $x_2O_2y_2$ sunt: ${}^2C(5,2)$. R: (9,0)
6. Fie sistemele de de referință $x_1O_1y_1$ şi $x_2O_2y_2$ şi coordonatele O_2 față de $x_1O_1y_1$ sunt ${}^1O_2(-2,-2)$. Punctul A pe axa x_2O_2, în sensul negativ al axei, are coordonatele față de sistemul de referință $x_1O_1y_1$: ${}^1A(10, -2)$. Punctul B pe axa O_2y_2, în sensul negativ al axei, are coordonatele față de sistemul de referință $x_1O_1y_1$: ${}^1B(-2, 0)$.
Să se calculeze coordonatele punctului C față de sistemul de referință $x_2O_2y_2$, dacă coordonatele acestui punct față de sistemul de referință $x_1O_1y_1$ sunt: ${}^1C(2,5)$. R: (-4, -7).